

**Віктор СЛЮСАРЕНКО**, аспірант кафедри фізики та методики викладання Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка

## ТЕОРІЯ УДАРУ

*На допомогу вчителям, учням та студентам педагогічних ВУЗів пропонуємо навчальний матеріал із застосування закону збереження імпульсу: удар та його види.*

Удар – це особливий вид руху матеріальної системи, при якому за малий проміжок часу імпульси точок системи дістають скінченні прирости. Оскільки під час удару швидкість змінюється за дуже короткий проміжок часу, то прискорення дуже велике, а отже, великі й сили, що виникають від удару. Ці сили називають ударними або миттєвими. Внаслідок того, що інші (неударні) сили, які діють на тіла, що співударяються (сили тертя, опору, тяжіння тощо), малі порівняно з ударними силами, то за короткий час удару вони помітно не впливають на рух даних тіл і ними за цих умов знехтувати, вважаючи в процесі взаємодії систему тіл, що співударяються, ізольованою, до якої можна застосувати закон збереження імпульсу.

Явище удару поділяють на дві стадії: протягом першої двоє тіл зближаються, протягом другої центри їх мас віддаляються один від одного. Коли друга стадія відсутня (після взаємодії два тіла рухаються як одне ціле), удар називають абсолютно непружним. Якщо в процесі другої стадії деформація повністю зникає, удар є абсолютно пружним. Бувають також не зовсім пружні удари.

Для характеристики пружності тіл вводять коефіцієнт відновлення. Нехай тіло падає на нерухому плоску поверхню зі швидкістю  $\vec{v}$ , а відбивається від неї зі швидкістю  $\vec{u}$ , причому кут падіння  $\alpha$ , кут відбивання  $\beta$ . Оскільки миттєвим тертям можна знехтувати, адже тіло будемо вважати за матеріальну точку, то миттєва сила – це сила нормальної реакції опори  $\vec{N}$ . Застосувавши до

матеріальної точки, що рухається, твердження про зміну імпульсу за час удару, дістанемо:

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{u} - m\vec{v},$$

де  $\vec{F}\Delta t$  - імпульс миттєвої сили  $\vec{N}$ , напрямлений по нормалі  $\vec{n}$  до поверхні.

Проектуючи вектори  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}$  та  $\vec{n}$  на напрям нормалі  $\vec{n}$  і дотичної  $t$ , знайдемо:

$$F\Delta t = mv_n + mu_n; \quad (100)$$

$$u_t - v_t = 0.$$

З останнього рівняння випливає, що  $u_t = v_t$ ,

тобто дотичні складові швидкостей тіла до і після удару рівні між собою. Щоб визначити нормальні складові  $u_n$  і  $v_n$ , до рівняння (100) додають ще одне, в якому враховано фізичні (насамперед пружні) властивості матеріалів, з яких виготовлені тіла та поверхні:

$$k = \left| \frac{u_n}{v_n} \right|,$$

де  $k$  - коефіцієнт відновлення; залежно від матеріалу тіл, які співударяються, його значення лежить у межах від 0 до 1:  $0 \leq k \leq 1$ .

Щоб визначити коефіцієнт відновлення на досліді, кульку, яка виготовлена з матеріалу, для якого потрібно визначити  $k$ , кидають з певної висоти  $h$  без початкової швидкості на масивну плиту з відповідного матеріалу. У момент удару кулька має швидкість  $v = \sqrt{2gh}$ . Після удару вона відскакує на висоту  $h_1$  зі швидкістю  $u = \sqrt{2gh_1}$ . оскільки ці швидкості напрямлені вздовж нормалі до поверхні плити, то  $u_n = u$  і  $v_n = v$ . Отже, коефіцієнт відновлення можна знайти за допомогою формули:

$$k = \left| \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh}} \right| = \left| \sqrt{\frac{h_1}{h}} \right|.$$

**Прямий центральний удар двох куль.** Удар називається прямим, якщо перед ним швидкості центрів інерції тіл, які ударяються, паралельні прямій, що перпендикулярна до поверхонь тіл у точці їх стикання. ця лінія називається

лінією удару. Удар називається центральним, якщо центри інерції тіл, що ударяються, лежать на лінії удару.

Визначимо, чому дорівнюють швидкості двох кульок після прямого центрального удару. нехай швидкість першої кулі до удару рівна  $\vec{v}_1$ , після удару  $\vec{u}_1$ , а її маса становить  $m_1$ . Для другої кульки відповідно:  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{u}_2$  та  $m_2$ . швидкості центрів мас цих кульок напрямлені по прямій, що їх сполучає. Миттєвими силами при співударянні є сили тиску однієї кульки на другу. Розглянемо рух кожної кульки окремо. Використавши твердження про зміну імпульсу в проекції на вісь, матимемо:

$$m_1(u_1 - v_1) = -Ft;$$

$$m_2(u_2 - v_2) = Ft.$$

Додавши почленно ці рівняння, дістанемо:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

Дане рівняння є основним рівнянням Ньютона в теорії удару. З нього випливає, що імпульс матеріальної системи під час удару не змінюється. Але цього рівняння недостатньо для вивчення прямого удару двох тіл, оскільки з нього не можливо знайти  $u_1$  і  $u_2$ . Друге рівняння вводимо на основі гіпотези Ньютона про коефіцієнт відновлення  $k$ , який дорівнює:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2},$$

де  $u_2 - u_1$  та  $v_1 - v_2$  - відповідно проекції відносних швидкостей на лінію удару. З попередніх двох рівнянь знаходимо  $u_1$  і  $u_2$ :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{(m_1 - km_2)v_1 + (1+k)m_2v_2}{m_1 + m_2} \\ u_2 = \frac{(1+k)m_1v_1 + (m_2 - km_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{cases}.$$

Виходячи з вище зазначеної системи рівнянь, можемо знайти  $u_1$  і  $u_2$  для окремих випадків центральних ударів двох кульок:

а) *Пружний удар двох кульок* ( $k = 1$ ). Підставивши у систему рівнянь  $k = 1$ , дістанемо:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \\ u_2 = \frac{m_1 (2v_1 - v_2) + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \end{cases} .$$

б) *Пружний удар двох кульок рівної маси* ( $k = 1$ ,  $m_1 = m_2$ ). Підставивши у вище зазначену систему рівнянь  $m_1 = m_2 = m$ , дістанемо:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{m v_1 + m(2v_2 - v_1)}{m + m} = \frac{2v_2}{2} = v_2 \\ u_2 = \frac{m_1(2v_1 - v_2) + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2v_1}{2} = v_1 \end{cases} .$$

З даної системи рівнянь ми бачимо, що кульки обмінюються своїми швидкостями.

в) *Непружний удар двох кульок* ( $k = 0$ ). Для непружного удару матимемо наступні швидкості:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \end{cases} .$$

Для непружного удару швидкості кульок  $u_1$ ,  $u_2$  рівні, адже після такого виду удару двох тіл вони рухаються як одне ціле з однаковою швидкістю  $u$ .

Пружний удар можна спостерігати на досліді під час зіткнення двох сталених кульок. У момент удару обидві кульки деформуються, частина їх кінетичної енергії перетворюється на певний час у потенціальну енергію пружного стискання. Швидкості кульок на дуже малий проміжок часу зрівнюються, а потім потенціальна енергія пружного стискання знову перетворюється в кінетичну енергію; кульки, відновлюючи свою попередню форму, відштовхуються одна від одної і продовжують рухатися з різними швидкостями.

Прикладом непружного удару є співудар тіл із свинцю, пластиліну, м'якої глини тощо. Деформація, що виникає під час непружного удару в тілах, після припинення удару не зникає і частина енергії механічного руху перетворюється у внутрішню енергію тіл. Тому закон збереження механічної енергії не

виконується для непружного зіткнення і ним не можна користуватися для визначення, наприклад, швидкості руху тіл після зіткнення. В цьому випадку слід використовувати закон збереження імпульсу.

Знаючи швидкості руху кульок після удару, легко визначити частину їх кінетичної енергії, що була затрачена на роботу деформації. Кінетична енергія кульок до удару  $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ , після удару  $(m_1 + m_2)\frac{1}{2}v^2$ . Їх різниця й дає ту частину енергії, яка відповідає роботі деформації:

$$A_{\text{деф}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 + v_2)^2.$$

Якщо до удару одне з тіл було нерухомим, наприклад  $v_2 = 0$ , то

$$A_{\text{деф}} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}E_k,$$

де  $E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2$  - кінетична енергія системи до удару.

На практиці удар використовують для деформації переміщення. приклади використання удару для деформації: кування, штампування, подрібнення тіл. З формули  $A_{\text{деф}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}E_k$  випливає, що для того, щоб більша частина кінетичної енергії тіла, яким б'ють, затрачалася на деформацію, маса цього тіла має бути значно меншою за масу тіла, по якому б'ють. Наприклад, на ковальня разом зі шматком металу має бути в багато разів масивнішою бути за молоток.

Прикладами використання удару для переміщення тіл є: забивання цвяхів, рух лопаток турбін тощо. Щоб можливо більша частина кінетичної енергії тіла, яким б'ють, затрачалася в цьому випадку на переміщення тіла, по якому б'ють, маса тіла, яким б'ють (молоток, струмінь води, що б'є в лопатки тощо), повинна бути в багато разів більшою за масу переміщуваного тіла (цвях, лопатки тощо).