ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ ТА ЗОЛОТА ПРОПОРЦІЯ

Віктор СЛЮСАРЕНКО, *зав. лабораторіями методики викладання фізики Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка*

Матеріал можна використати на заняттях математичних гуртків для зацікавлення учнів математикою. Адже числа Фібоначчі та золота пропорція є «діамантами» математики.

1. Уведення чисел Фібоначчі за допомогою задачі про кролів.

Історія багата на видатних математиків. Великі досягнення стародавньої математичної науки донині викликають захоплення гостротою розуму їх авторів, а імена Евкліда, Архімеда, Герона відомі кожній освіченій людині.

Інакше з математикою середньовіччя. Окрім Вієта, у шкільному курсі математики не згадується жодного імені, яке б до нього відносилося. Це не випадково, бо математика у цей період розвивалася надзвичайно повільно і великих математиків тоді було дуже мало.

Тим більший інтерес представляє праця «Liber abaci» («Книга про абак»), написана видатним італійським математиком Леонардо із Пізи, який відомий більше за своїм прізвищем Фібоначчі. Ця книга, написана в 1202 р., дійшла до нас у другому варіанті, що відноситься до 1228 р.

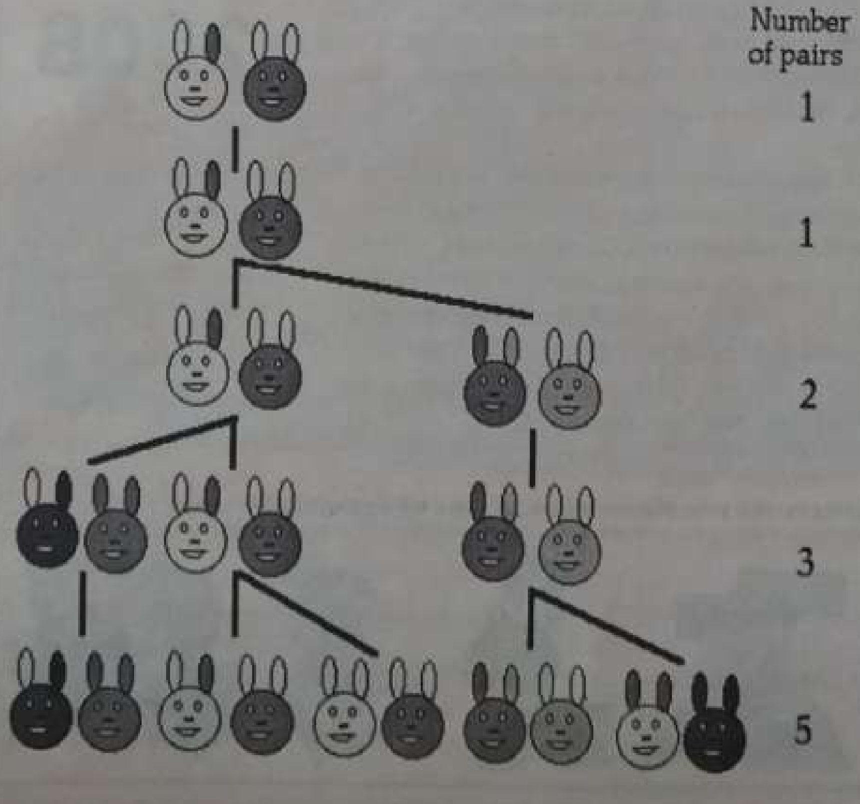
«Liber abaci» являє собою велику за обсягом працю, що містить майже всі арифметичні та алгебраїчні відомості того часу. Вона відігравала важливу роль у розвитку математики в Західній Європі протягом кількох наступних століть. Зокрема, саме дякуючи цій праці, європейці ознайомилися з індійськими (арабськими) цифрами.

Теоретичний матеріал, викладений у «Liber abaci», пояснюється на великій кількості задач, що становить значну частину цієї праці.

Розглянемо та розв'яжемо одну з них.

Задача. Скільки пар кроликів за один рік від однієї пари народжується?

Розв'язання



Помістимо пару кроликів у деякому, ізольованому від інших кроликів, місці, щоб дізнатися, скільки пар кроликів народиться при цьому протягом року, якщо природа кроликів така, що через місяць пара кроликів народжує іншу пару, а народжують кролики з другого місяця після свого народження. Оскільки перша пара в перший місяць народжує одну пару кролів, то в цьому місяці буде вже дві пари; із них одна пара, а саме перша, народжує і в наступному місяці, так що у другому місяці матимемо три пари; із них в наступному місяці дві пари будуть давати потомство, так що в третьому місяці народиться ще дві пари кроликів, і кількість пар кроликів в цьому місяці досягне п'яти;

із них у цьому місяці будуть давати потомство три пари, і кількість пар кроликів у четвертому місяці досягне восьми; із них 5 пар народжують інші 5 пар, які разом з 8 парами дадуть у п'ятому місяці 13 пар; із них 5 пар, народжені в цьому місяці, не дадуть у цьому самому місяці потомства, а інші 8 пар народять, так що в шостому місяці отримаємо 21 пару; разом з 13 парами, які народяться в сьомому місяці, вони дають 34 пари; разом з 21 парою, які народилися у восьмому місяці, вони дають у цьому місяці 55 пар кролів; разом з 34 парами, які народилися в дев'ятому місяці, вони дають 89 пар; разом знову з 55 парами, які народжуються в десятому місяці, вони дають у цьому місяці 144 пари; знову разом з 89 парами, які народилися в одинадцятому місяці, вони дають у цьому місяці 233 пари; разом знову з 144 парами, які народилися в останньому місяці, вони дають 377 пар. Стільки пар народила перша пара в кінці одного року.

Якщо позначити кількість пар кроликів у n-му місяці через F_n, то

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21 \text{ і т. д.},$$

причому утворення цих чисел регулюється загальним законом:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

для всіх $n > 2$, адже кількість пар кроликів у n-му місяці дорівнює числу F_{n-1} пар кроликів у попередньому місяці плюс кількість пар, які знов народилися, що збігається з числом F_{n-2} пар кроликів, які народилися у ($n - 2$)-му місяці (бо лише ці пари кроликів дають потомство).

Числа F_n, що утворюють послідовність

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...,

називають *числами Фібоначчі*, а саму послідовність — *послідовністю Фібоначчі*.

2. Поняття золотої пропорції. Коефіцієнти Фібоначчі.

Послідовність Фібоначчі

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

асимптотично (наближається все повільніше і повільніше) прямує до деякого сталого відношення. Проте це відношення ірраціональне, тобто є числом з нескінченною непередбачуваною послідовністю десяткових цифр у дробовій частині. Його неможливо виразити точно.

Якщо який-небудь член послідовності Фібоначчі розділити на попередній (наприклад, 13 : 8), то результатом буде число, що наближено дорівнює ірраціональному значенню 1,61803398875... Але навіть витративши на обчислення все життя, його неможливо знайти до останньої десяткової цифри. Округливши його до тисячних, матимемо 1,618.

Особливі назви цьому відношенню почали давати ще до того, як Лука Пачолі (середньовічний математик) назвав його *золотою пропорцією*. Серед його сучасних назв є такі, як *золотий переріз*, *золотий середній* і *відношення квадратів, що крутяться*. В алгебрі загальноприйняте його позначення грецькою буквою $\varphi = 1{,}618$.

Асимптотична поведінка послідовності, затухаючі коливання її відношення біля ірраціонального числа φ можуть стати зрозумілішими, якщо показати відношення кількох перших членів послідовності:

1 : 1 = 1,0000, що менше за φ на 0,6180;
2 : 1 = 2,0000, що більше за φ на 0,3820;
3 : 2 = 1,5000, що менше за φ на 0,1180;
5 : 3 = 1,6667, що більше за φ на 0,0486;
8 : 5 = 1,6000, що менше за φ на 0,0180, і т. д.

Виконуючи такі самі дії, бачитимемо, що кожен член ділитиметься на наступний зі все більшим і більшим наближенням до недосяжного φ.

Виконуючи ділення будь-якого члена послідовності Фібоначчі на наступний за ним член, отримаємо число, обернене до 1,618 (1 : 1,618 ≈ 0,618). Оскільки число, отримане від ділення наступного члена послідовності Фібоначчі на попередній — це нескінченний дріб, то і обернене також буде нескінченним дробом.

Виконуючи ділення кожного числа послідовності Фібоначчі на наступне за ним через одне, отримаємо число 0,382 та обернене до нього число 1 : 0,382 ≈ 2,618.

Добираючи так відношення, отримаємо основний набір коефіцієнтів Фібоначчі:

4,235; 2,618; 1,618; 0,618; 0,382; 0,236.

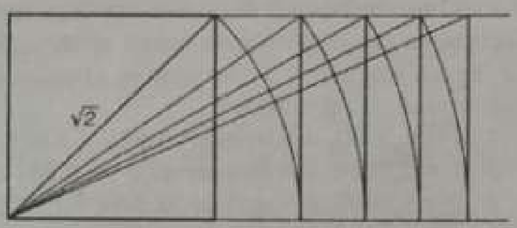
Усі вони відіграють особливу роль у природі та, зокрема, в технічному аналізі.

Необхідно зауважити, що Фібоначчі лише звернув увагу на таку послідовність, оскільки вона була відома ще з найдавніших часів під назвою *золотий переріз*.

3. Історія золотої пропорції.

Прийнято вважати, що поняття золотого перерізу ввів Піфагор — давньогрецький філософ і математик (VI ст. до н.е.). Є припущення, що Піфагор знання про нього запозичив у єгиптян і вавилонян. І справді, пропорції піраміди Хеопса, храмів, барельєфів, предметів побуту та прикрас з гробниці Тутанхамона свідчать, що єгипетські майстри користувалися співвідношеннями *золотого перерізу* під час їх створення. Французький архітектор Ле Корбюзьє знайшов, що в рельєфі з храму фараона Сеті в Абідосі та рельєфі, що зображає фараона Рамзеса, пропорції фігур відповідають золотому перерізу. Архітектор Хесира, зображений на рельєфі дерев'яної дошки з гробниці його імені, тримає в руках вимірювальні інструменти, де зафіксовано пропорції золотого перерізу.

Греки були майстерними геометрами. Навіть арифметики навчали своїх дітей за допомогою геометричних фігур. Квадрат Піфагора і діагональ цього квадрата були підставою для побудови динамічних прямокутників.



Платон (427–347 рр. до н.е.) також знав про золотий переріз і приділяв увагу математичним і естетичним переконанням школи Піфагора, зокрема питанням золотого перерізу.

У фасаді давньогрецького храму Парфенона є золоті пропорції. Під час його розкопок виявлено циркулі, якими користувалися архітектори та скульптори античного світу.

У Помпейському циркулі (музей у Неаполі) також закладено пропорції золотого поділу.

В античній літературі, що дійшла до нас, золотий переріз уперше згадується в «Началах» Евкліда. У 2-й книзі «Начал» дається геометрична побудова золотого перерізу. Після Евкліда дослідженням золотого перерізу займалися Гіпсікл (бл. 180 р. до н.е.), Папп (III ст. н.е.) та інші. У середньовічній Європі із золотим перерізом ознайомилися за арабськими перекладами «Начал» Евкліда. Італійський математик і перекладач Дж. Кампано (XIII ст.) зробив новий переклад «Начал» і дав до перекладу цінні коментарі та доповнення. Способи золотого перерізу зберігалися у великій таємниці. Вони були відомі тільки окремим ученим.

В епоху Відродження посилюється інтерес до золотого перерізу серед учених і художників у зв'язку з його застосуванням як у геометрії, так і в мистецтві, особливо в архітектурі. Леонардо да Вінчі, художник і вчений, бачив, що в італійських художників емпіричний досвід великий, а знань мало. Він почав писати книгу з геометрії, але в цей час з'явилася книга ченця Луки Пачолі (1454–1514), і Леонардо залишив свій задум. На думку сучасників і істориків, Лука Пачолі був справжнім світилом, найбільшим математиком Італії в період між Фібоначчі і Галілеєм. Лука Пачолі був учнем художника П'єро Делла Франческі, що написав дві книги, одна з яких «Про перспективу в живописі». Його вважають творцем нарисної геометрії.

Лука Пачолі чудово розумів значення науки для мистецтва. У 1496 р. на запрошення герцога Моро він приїжджає до Мілана, де читає лекції з математики. У Мілані при дворі герцога у той час працював і Леонардо да Вінчі. У Венеції була видана книга Луки Пачолі «Божественна пропорція» з блискуче виконаними ілюстраціями, зважаючи на що вважають, що їх зробив Леонардо да Вінчі. Книга була захопленим гімном золотої пропорції. Серед багатьох переваг золотої пропорції чернець Лука Пачолі не забув назвати і її «божественну суть» як вираз божественної триєдиності (розуміючи, що малий відрізок є уособлення Бога Сина, більший відрізок — Бога Батька, а весь відрізок — Бога Духу Святого).

Леонардо да Вінчі також багато уваги приділяв вивченню золотого перерізу. Він проводив перерізи стереометричного тіла, утвореного правильними п'ятикутниками, і кожного разу отримував прямокутники з відношеннями сторін у золотій пропорції. Тому він дав цьому діленню назву *золотий переріз*. Така назва найпопулярніша і донині.

У той самий час на півночі Європи, у Німеччині, над тими самими проблемами працював Альбрехт Дюрер (1471–1528). Дюрер пише: «Необхідно, щоб той, хто що-небудь уміє, навчив цього інших, які цього потребують. Це я і наміривсь зробити». З листів Дюрера відомо, що він зустрічався з Лукою Пачолі під час перебування в Італії. Відомий пропорційний циркуль Дюрера.

У подальші століття правило золотої пропорції перетворилося на академічний канон. У 1855 р. німецький дослідник золотого перерізу професор Цейзінг опублікував свою працю «Естетичні дослідження». Він абсолютизував пропорцію золотого перерізу, оголосивши її універсальною для всіх явищ природи та мистецтва.

4. Золота пропорція в геометрії.

І. Кеплер (1571–1630) говорив, що геометрія має два скарби — теорему Піфагора і золотий переріз. І якщо перше з цих двох скарбів можна порівняти із золотом, то друге — з коштовним каменем.

Теорему Піфагора знає кожен школяр, а що таке золота пропорція — далеко не всі.

Людина розрізняє оточуючі її предмети за формою. Інтерес до форми якого-небудь предмета може бути викликаний життєвою необхідністю або — красою форми. Форма, в основі побудови якої лежить поєднання симетрії та золотого перерізу, сприяє якнайкращому зоровому сприйняттю і появі відчуття краси й гармонії. Ціле завжди складається з частин, частини різної величини знаходяться в певному відношенні один до одного і до цілого. Принцип золотого перерізу — це найвищий прояв структурної та функціональної досконалості цілого і його частин у мистецтві, науці, техніці та природі.

Золотий переріз — це гармонійна пропорція.

У математиці пропорцією називають рівність двох відношень.

Відрізок прямої AB можна розділити точкою C на дві частини такими двома способами:

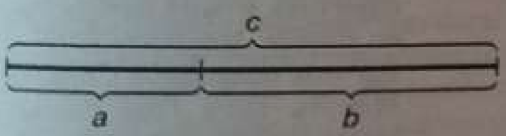
1) на дві рівні частини $AB : AC = AB : BC$;

2) на дві нерівні частини в будь-якому відношенні (такі частини пропорції не утворюють);

Якщо $AB : AC = AC : BC$, то такий поділ відрізка буде золотим перерізом або діленням відрізка в крайньому та середньому відношенні.

Золотий переріз — це таке пропорційне ділення відрізка на нерівні частини, при якому весь відрізок так відноситься до більшої частини, як більша частина відноситься до меншої; або менший відрізок так відноситься до більшого, як більший до всього:

$a : b = b : c$ або $c : b = b : a$.



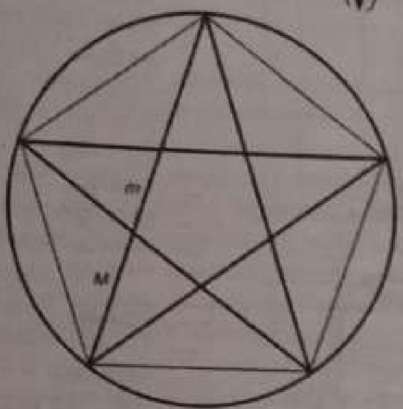
Відрізки золотої пропорції виражаються нескінченним ірраціональним дробом 0,618... Якщо у записаному відношенні c прийняти за одиницю, то $a = 0{,}382$... Як ми вже знаємо, числа 0,618 і 0,382 є коефіцієнтами послідовності Фібоначчі.

Прямокутник з таким відношенням сторін стали називати *золотим прямокутником*. Він також має цікаві властивості. Якщо від нього відрізати квадрат, то залишиться знову золотий прямокутник. Цей процес можна продовжувати до безмежності. А якщо проводити діагоналі попереднього і наступного прямокутника, то точка їх перетину належатиме всім отриманим золотим прямокутникам.

Є і *золотий трикутник*. Це рівнобедрений трикутник, у якого відношення довжини бічної сторони до довжини основи дорівнює 1,618.

Є і золотий кубоїд — прямокутний паралелепіпед з ребрами, що мають довжини 1,618, 1 і 0,618.

У зірчастому п'ятикутнику кожна з п'яти ліній, що утворюють фігуру, ділить іншу у відношенні золотого перерізу, а кінці зірки є золотими трикутниками.

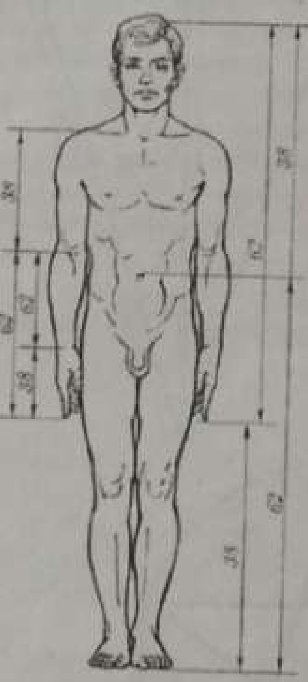


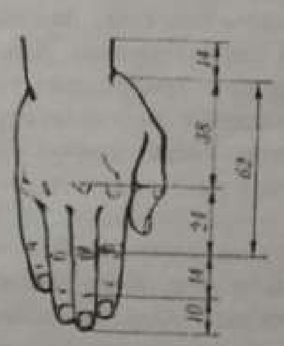
5. Приклади з життя, де спостерігаються числа Фібоначчі та золота пропорція.

Людина. Альбрехт Дюрер детально розробив теорію пропорцій людського тіла. Важливе місце в своїй системі співвідношень Дюрер відводив золотому перерізу. Зріст людини ділиться в золотих пропорціях лінією поясу, а також лінією, проведеною через кінчики середніх пальців опущених рук; нижня частина лиця — ротом і т.д.

Професор Цейзінг у цьому напрямі також виконав величезну роботу. Він обміряв близько двох тисяч людських тіл і дійшов висновку, що золотий переріз виражає середній статистичний закон. Ділення тіла точкою пупа — найважливіший показник золотого перерізу. Пропорції чоловічого тіла коливаються в межах середнього відношення $13 : 8 = 1{,}625$ і ближче підходять до золотого перерізу, ніж пропорції жіночого тіла, для якого середнє значення пропорції виражається співвідношенням $8 : 5 = 1{,}6$. У новонародженого таке відношення становить $1 : 1$, до 13 років воно дорівнює 1,6, а до 21 року дорівнює, залежно від статі, чоловічому або жіночому. Пропорції золотого перерізу виявляються і щодо інших частин тіла: довжина плеча, передпліччя і кисті, кисті і пальців і т.д.

Справедливість своєї теорії Цейзінг перевіряв на грецьких статуях. Найдетальніше він розробив пропорції Аполлона Бельведерсько-

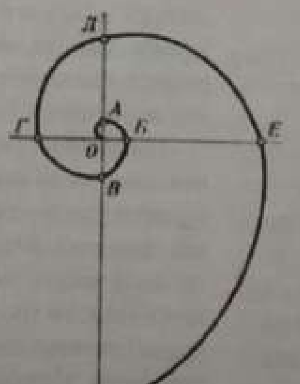


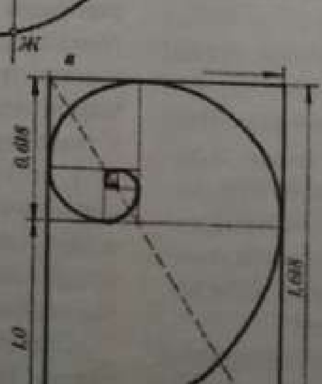


го. Він досліджував грецькі вази, архітектурні споруди різних епох, рослини, тварини, пташині яйця, музичні тони, віршовані розміри. Цейзінг дав визначення золотому перерізу, показав, як він виражається у відрізках прямої і в цифрах. Коли цифри, що виражають довжини відрізків, були отримані, Цейзінг побачив, що вони складають ряд Фібоначчі, який можна продовжувати до безмежності в одну та іншу сторону. Наступна його книга мала назву «Золотий переріз як основний морфологічний закон у природі та мистецтві». У 1876 р. в Росії була видана невелика книжка, майже брошура, з викладом цієї праці Цейзінга.

Природа. Дивує, скільки сталих можна обчислити за допомогою послідовності Фібоначчі і як її члени виявляються у величезній кількості поєднань! Проте не буде перебільшенням сказати, що це не просто гра з числами, а найважливіший математичний вираз природних явищ з усіх коли-небудь відкритих. Приклади, що наводяться нижче, ілюструють деякі цікаві прояви цієї математичної послідовності.

Раковина закручена по спіралі. Якщо її «розвернути», то отримаємо довжину, що ненабагато менша від довжини змії. Так невелика десятисантиметрова раковина має спіраль довжиною 35 см. Спіралі дуже поширені в природі. На малюнках зображено спіраль Архімеда.





Мають місце такі співвідношення:

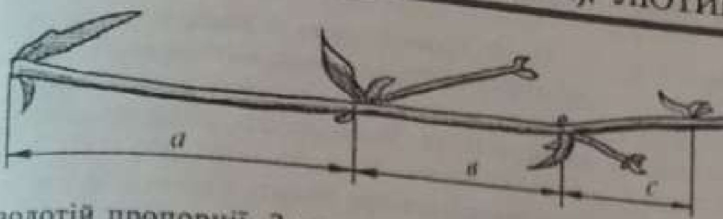
$OБ : OA = OB : OБ =$
$= OГ : OB = ... = 1{,}618;$
$(OБ + OГ) : (OB + OA) =$
$= ... = 1{,}618.$

Форма спіральної завитої раковини привернула увагу Архімеда. Він вивчав її і вивів рівняння спіралі. Спіраль, побудована за цим рівнянням, названа його ім'ям. Збільшення її кроку завжди відбувається рівномірно. Спіраль Архімеда широко застосовується в техніці.

Німецький поет Гете також підкреслював наявність у природи тенденції до спіральності. Гвинтоподібне та спіралевидне розташування листя на гілках дерев помітили давно. Спіраль побачили в розташуванні насіння соняшника, в шишках сосни, ананасах, кактусах і т.д. Спільна робота ботаніків і математиків пролила світло на ці дивовижні явища природи. З'ясувалося, що в розташуванні листя на гілці, насіння в соняшнику, шишок на сосні проявляється ряд Фібоначчі, а отже, закон золотого перерізу. Павук плете павутину спіралевидно. Спіраллю закручується ураган. Навіть налякане стадо північних оленів розбігається по спіралі. Молекула ДНК закручена подвійною спіраллю. Мабуть тому Гете називав спіраль «кривою життя».

Серед придорожніх трав є непримітна рослина — цикорій. Придивимося до неї уважно: від основного стебла йде пагонець; тут розташувався і перший листок.

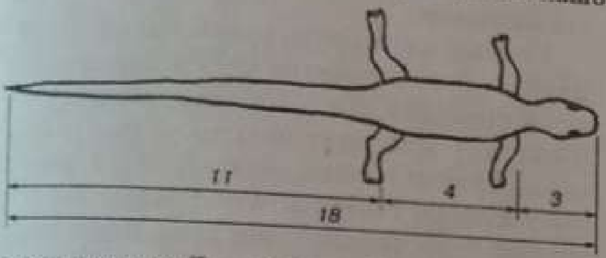
Пагонець робить викид, зупиняє ріст і випускає листок, але вже коротший від першого, знову робить викид, але вже меншої довжини, випускає листок ще меншого розміру і знову викид. Якщо перший викид прийняти за 100 одиниць, то другий дорівнює 62 одиницям, третій — 38, четвертий — 24 і т.д. Довжина пелюсток теж підпорядкована



золотій пропорції. Зростаючи, завойовуючи простір, рослина зберігає певні пропорції. Імпульси її зростання поступово зменшуються в пропорції золотого перерізу.

Іншим прикладом може бути ящірка.

У ящірки спостерігаються приємні для нашого ока пропорції — довжина її хвоста так відноситься до довжини решти тіла, як 62 до 38.



І у рослинному, і в тваринному світі наполегливо проявляється формоутворювальна тенденція природи — симетрія щодо напряму зростання та руху. Тут золотий переріз виявляється в пропорціях частин перпендикулярно до напряму зростання.

Природа здійснила поділ на симетричні частини та золоті пропорції. У частинах виявляється повторення будови цілого. Наприклад, яйце птаха.

Космос. Закономірності золотої симетрії та пропорції виявляються в енергетичних переходах елементарних частинок, у будові деяких хімічних сполук, у планетарних і космічних системах, у генних структурах живих організмів. Ці закономірності, як вказано вище, є в будові окремих органів людини і тіла в цілому, а також виявляються в біоритмах і функціонуванні головного мозку та зорового сприйняття.

Відомо, що І. Тіціус (1729–1796), німецький фізик та астроном, за допомогою послідовності Фібоначчі знайшов закономірність і порядок у відстанях між планетами Сонячної системи.

Послідовність Фібоначчі використовують широко: з її допомогою представляють архітектоніку і живих істот, і рукотворних споруд, і будову Галактик. Ці факти — свідоцтво незалежності послідовності Фібоначчі від умов її прояву, що є однією з ознак її універсальності.

Піраміди. Багато хто намагався розгадати таємниці Великої піраміди в Гізі. На відміну від інших єгипетських пірамід, це не гробниця. Винахідливість і майстерність архітекторів, використані ними пропорції, символи указують на надзвичайну важливість послання, яке вони хотіли передати майбутнім поколінням через збудовану піраміду.

Ключ до геометрично-математичної таємниці Великої піраміди в Гізі, що так довго був для людства загадкою, насправді був переданий Геродоту храмовими жерцями, які повідомили, що піраміда побудована так, щоб площа кожної із її граней дорівнювала квадрату її висоти.

Довжина граней піраміди дорівнює 783,3 фута (238,7 м), висота піраміди — 484,4 фута (147,6 м). Довжина граней, поділена на висоту, приводить до відношення $\varphi = 1{,}618$. Висота 484,4 фута відповідає 5813 дюймам, а 5, 8, 13 — це числа з послідовності Фібоначчі.

Такі цікаві спостереження вказують на те, що конструкція піраміди заснована на відношенні $\varphi = 1{,}618$. Сучасні вчені схиляються до інтерпретації, що давні єгиптяни побудували її з єдиною метою — передати знання, які вони хотіли зберегти для майбутніх поколінь.

Інтенсивні дослідження Великої піраміди в Гізі показали, наскільки обширними були в ті часи пізнання в математиці й астрології. У всіх внутрішніх і зовнішніх пропорціях піраміди число 1,618 грає центральну роль.

Не тільки єгипетські піраміди побудовані відповідно до досконалих пропорцій золотого перерізу. Те саме явище виявлене й у мексиканських пірамід. Виникає думка, що як єгипетські, так і мексиканські піраміди були зведені приблизно в один і той самий час.

На перерізі піраміди можна побачити форму, подібну до сходів. У першому ярусі їх 16, у другому — 42, у третьому — 68.

Ці числа пов'язані з послідовністю Фібоначчі так:

$$16 \cdot 1{,}618 = 26;\ 16 + 26 = 42;\ 26 \cdot 1{,}618 = 42;$$
$$42 + 26 = 68.$$

Хронологія стародавньої історії. Як інструмент хронології вперше було обрано гармонійну систему числових відношень — ряд Фібоначчі.

Прикмети такого ряду очевидні в хронології епох від І тис. до н.е. до І тис. н.е. Числа ряду фіксують пізню залізну епоху (І тис. до н. е.). У інтервалі 4—2 тис. до н.е. зосереджено культури енеоліта, ранньої та пізньої бронзи Європи, до інтервалу 13—5 тис. до н.е. відносять європейський мезоліт і неолітичні культури Близького Сходу. Проте мезоліт Близького Сходу датують інакше: 10—7 тис. до н.е., а мезоліт Східної Європи — 11—6 тис. до н.е. Особливості в хронології культур 10—5 тис. до н.е. регіональні. Вони залежать від нерівномірності розвитку, що виникла у верхньому палеоліті та зберігалася протягом усього часу надалі.

Підкреслені розбіжності в хронології археологічних епох мають регіональний масштаб, ніяк не зачіпають самої числової послідовності, властивої ряду Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8. Очевидно, що в хронології археологічних культур раннього часу, розвитку яких властивий планетарний характер, слід чекати чіткішої відповідності ряду Фібоначчі. Продовжимо ряд, його складають такі числа:

13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181 і т.д.

Спочатку здавалося дивовижним: справді деякі члени цієї послідовності відповідають хронологічним рубежам у якнайдавнішій історії людства, особливо якщо до чисел додати найменування «тис. років до н. е.» або «тис. років тому», або просто «тис. років». Так, позицію 233 тис. років у послідовності, що наводиться, можна ототожнити з датою зледеніння в Європі, загальновизнана геологічна дата якого 230 тис. років тому. Позиція, що відповідає 377 тис. років, близька до дати 400 тис. років. До цього часу відносять вихід людства з біоценоза.

Найдавніші знахідки пам'яток біологічних істот, котрі застосовували штучно виготовлені кам'яні знаряддя, виявлені в Олдувайській ущелині у Східній Африціу середині III мільйоноліття (2584 тис. р.) з'являються австралопітекові форми людини, які перші починають виготовляти знаряддя праці. Упродовж 720–600 тис. років складається трудова традиція та формується мова. Дата завершення цих процесів знаходиться майже поряд з позицією ряду в 610 тис. років.

Справді, ці рубежі розмежовують розвиток людства на окремі етапи, що іноді називають тимчасовими ступенями. Перехід з одного тимчасового ступеня на інший вважають еволюцією системи.

Як відомо, 11 з 18 позицій ряду Фібоначчі перевірено та підтверджено з достатнім ступенем надійності й точності. Іноді говорять, що одне підтвердження — випадковість, два — збіг, три — тенденція. У нашому випадку не три, а 60 % збігів перевірено та підтверджено. Таку кількість підтверджень можна вважати проявом не стільки тенденції, скільки закономірності.

Отже, хронологія та періодизація історичного розвитку за допомогою ряду Фібоначчі розділена на 18 тимчасових ступенів, що мають планетарний характер. Повторимо їх:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584.

Події, хронологія яких виявляється за межами ряду, мають регіональний характер. Хронологічні межі археологічних епох і періодів, знайдені за допомогою ряду Фібоначчі, жорсткі: вони або прийнятні, або — ні. В основі такого вибору лежить науковий світогляд, який завжди строгий і безумовний.

Технічний аналіз ринків. Висловимо сміливу думку: якщо практично все в нашому світі базується на коефіцієнтах Фібоначчі, то чому б не використовувати їх у технічному аналізі руху цін на біржах.

Уперше це запропонував Ральф Нельсон Еллiотт. Він на початку 1930 р. зайнявся аналізом біржових цін, особливо індексом Доу-Джонса. Після ряду вельми успішних прогнозів Еллiотт опублікував у 1939 р. серію статей у журналі Financial World Magazine. У них уперше було сказано, що рухи індексу Доу-Джонса відбуваються за певними ритмами. За Еллiоттом, вони відбуваються за тими самими законами, що й приливи — як за приливом слідує відлив, так за дією (акцією) слідує протидія (реакція). Ця схема не залежить від часу, оскільки структура ринку, узятого як єдине ціле, залишається незмінною.

Еллiотт писав: «Закон природи включає в розгляд найважливіший элемент — ритмічність. Закон природи — це не якась система, не метод гри на ринку, а явище, характерне, мабуть, для ходу будь-якої людської діяльності. Його застосування в прогнозуванні є революційним».

Така можливість передбачити рухи цін спонукає аналітиків трудитися вдень і вночі. Вводячи свій підхід, Еллiотт був дуже конкретний. Він писав: «Будь-якій людській діяльності властиві три характерні особливості: форма, час і відношення, і всі вони підкоряються підсумовуванню послідовності Фібоначчі».

Числа Фібоначчі мають широке застосування у повсякденному житті. Є ще надзвичайно багато прикладів, у яких спостерігаються числа Фібоначчі та золота пропорція.

Числа Фібоначчі — це надзвичайно цікаві числа, з якими бажано ознайомити всіх учнів. Вони вносять великий вклад у розвиток пізнавального інтересу до вивчення математики.

Література

1. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: Наука, 1968.
2. *Волков Ю.І.*, *Войналович Н.М.* Елементи дискретної математики. — Кіровоград, 2000.
3. *Воробьёв Н.Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1978.
4. *Пидоу Д.* Геометрия и искусство. — М.: Мир, 1979.

Видруковано з готових діапозитивів замовника ОП «Житомирська облдрукарня». Зам. 6549. Наклад 8330.